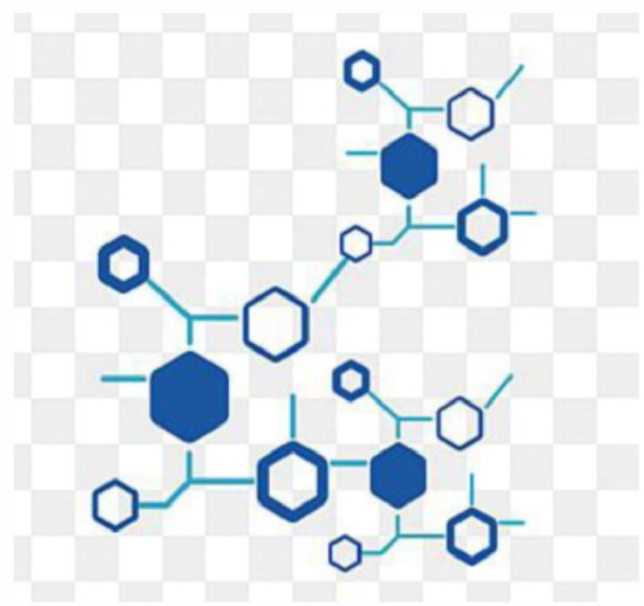




ISSN 2617-8052

ELMİ XƏBƏRLƏR

Riyaziyyat və Təbiət Elmləri seriyası



1 / 2022



ELMİ XƏBƏRLƏR

RİYAZİYYAT VƏ TƏBİƏT ELMLƏRİ

№ 1, 2022

REDAKSIYA HEYƏTİ

1. **İbrahimov Natiq (BAŞ REDAKTOR)**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
2. **Şəmmədov Ramiz (APARICI REDAKTOR)**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
3. **Əliyev Nihan**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
4. **Əhmədov Natiq**
Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti, Bakı, Azərbaycan
5. **Əzizov Əbdülsəid**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
6. **Əliyev Ələkbər**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
7. **Əliyev Elvin**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
8. **Əsgərov İdrak**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
9. **Hüseynov Hidayət**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
10. **Hümbətov Zaur**
Azərbaycan Dövlət Aqrar Universiteti, Bakı, Azərbaycan
11. **Hüseynov İsa**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
12. **İsmayılov Çingiz**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
13. **Kozlov Mixail**
Zoologiya İnstitutu, Sankt Peterburq, Rusiya
14. **Qasimov Yusif**
Azərbaycan Universiteti, Bakı, Azərbaycan
15. **Qardaşov Rauf**
AMEA-nın Akademik Həsən Əliyev adına Coğrafiya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
16. **Qurbanov Elşad**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
17. **Mehdiyev Məhəmməd**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
18. **Məmmədov Tofiq**
AMEA-nın Dendrologiya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
19. **Mənsimov Kamil**
AMEA-nın Kibernetika İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
20. **Məhərrəmov Mikayıl**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
21. **Məmmədov Hüseyn**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
22. **Mirzoev Karaxan**
Moskva Dövlət Universiteti, Moskva, Rusiya
23. **Nuriyev Urfat**
Ege Universiteti, İzmir, Türkiyə
24. **Pələngov Əbülfət**
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti, Bakı, Azərbaycan
25. **Reşidoğlu Xanlar**
Mersin Universiteti, Mersin, Türkiyə
26. **Vasilyev Feodr**
Moskva Dövlət Universiteti, Moskva, Rusiya
27. **Yaqub Qabil**
Kafkas Universiteti, Kars, Türkiyə
28. **Zeynalov Eldar**
AMEA-nın Kataliz və Qeyri-üzvi Kimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

EDITORIAL BOARD

1. **Ibrahimov Natig** (*EDITOR IN-CHIEF*)
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
2. **Shammadov Ramiz** (*MANAGING EDITOR*)
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
3. **Aliyev Nihan**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
4. **Ahmadov Natig**
Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan
5. **Azizov Abdulsaid**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
6. **Aliyev Alakbar**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
7. **Aliyev Elvin**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
8. **Askerov Idrak**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
9. **Huseynov Hidayat**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
10. **Humbatov Zaur**
Azerbaijan State Agrarian University, Ganja, Azerbaijan
11. **Huseynov Isa**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
12. **Ismayilov Chingiz**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
13. **Kozlov Mikhail**
Institute of Zoology, Saint-Petersburg, Russia
14. **Gasimov Yusif**
Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan
15. **Gardashov Rauf**
ANAS Institute of Geography, Baku, Azerbaijan
16. **Gurbanov Elshad**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
17. **Mekhdiyev Mahammad**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
18. **Mammadov Tofiq**
ANAS Institute of Dendrology, Baku, Azerbaijan
19. **Mansimov Kamil**
ANAS Institute of Control Systems, Baku, Azerbaijan
20. **Maharramov Mikayil**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
21. **Mammadov Huseyn**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
22. **Mirzoev Karakhan**
Moscow State University, Moscow, Russia
23. **Nuriyev Urfat**
Ege University, Izmir, Turkey
24. **Palangov Abulfat**
Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
25. **Reshidoghlu Khanlar**
Mersin University, Mersin, Turkey
26. **Vasilyev Feodr**
Moscow State University, Moscow, Russia
27. **Yagub Gabil**
Kafkas University, Kars, Turkey
28. **Zeynalov Eldar**
ANAS Institute of Catalysis and Inorganic Chemistry, Baku, Azerbaijan



MÜNDƏRİCAT

- 1. Məmmədhüseyn Hüseynov**
Lənkəran-Astara bölgəsində becərilən çay bitkisinin genofondu 5
- 2. Габил Ягуб, Натиг Ибрагимов, Низами Сулейманов**
Вторая начально-краевая задача для уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримым ограниченным комплексным потенциалом, зависящим от времени 13
- 3. Jalil Manafian**
Application of Fibonacci exp-function method for solving the partial differential equations 31

LƏNKƏRAN-ASTARA BÖLGƏSİNDƏ BECƏRİLƏN ÇAY BİTKİSİNİN GENEFONDU

Məmmədhüseyn Hüseynov

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

e-mail: mamed.h@mail.ru

Xülasə. Tədqiqat işində Lənkəran-Astara bölgəsində becərilən çay bitkisinin (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze) sort və formaların molekulyar markerlərdən istifadə edilərək genetik müxtəlifliyi öyrənilmiş və onların genofondu tədqiq olunmuşdur. Molekulyar marker sistemləri arasında RAPD (Randomly Amplified Polimorphic DNT) markerləri sürəti, sadəliyi və genetik müxtəlifliyin aşkarlanması və filogenезin təhlil üçün ən çox istifadə edilən üsuldur [5]. Məlum olmuşdur ki, mövcud sort və formaların genotiplərində fərqlilik ilə bioloji potensialları (məhsuldarlığın, xammalın biokimyəvi və keyfiyyət göstəricilərinin, iqtisadi səmərəliliyinin) arasında korelyativ əlaqə mövcuddur. Müşahidələr zamanı məlum olmuşdur ki, çay bitkisinin məhsuldarlığı havanın nisbi rütubətliyi, quraqlığa davamlılıq dərəcəsi və quraq keçən aylarda yağışlı günlərin sayı ilə daha sıx əlaqəlidir.

Açar sözlər: *Camellia sinensis* (L.) Kuntze, genetik müxtəliflik, genofond, nisbi rütubət

Giriş.

Çay bitkisi (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze) bütün dünyada ən məşhur alkoqolsuz içkilərdən biridir və tərəvəzləndirici dadı, cəlbədicə aroması və müalicəvi istifadəsi xüsusiyyətlərinə görə dünya əhalisinin təxminən 70%-i tərəfindən istehlak edilir [6, 8]. Çay Asiya, Afrika və Cənubi Amerikanın 52-dən çox ölkəsində yetişdirilən iqtisadi cəhətdən əhəmiyyətli bir məhsuludur [6, 7]. Bu bitki Azərbaycan Respublikasının cənub bölgəsinin ən əhəmiyyətli məhsullarından biridir və bölgənin iqtisadiyyatında mühüm rol oynayır. Məhsuldar bitkilərin genetik müxtəlifliyinin qiymətləndirilməsi və onlara istinad edərək genofondunun öyrənilməsi zəruri olan ilk addımlardan biridir [5]. Azərbaycanın rütubətli subtropiklərində çayın Çin növ müxtəlifliyi becərilir. Yerli torpaq şəraitinə uyğunlaşdırılmış çay bitkisinin genofondu ən perspektivli sort və formaları tədqiq edilərək istehsal məqsədləri üçün tövsiyə edilmişdir [1]. Tədqiqatlar Lənkəran-Astara bölgəsində Kənd Təsərrüfatı Nazirliyinin Meyvəçilik və Çayçılıq Elmi tədqiqat İnstitutunun Lənkəran Çay Filialının təcrübə sahəsində becərilən Fərmançay 1/73, Lənkəran 2/17, Xəzər 3/341, Faq-11, Faq-13, Faq-14, Faq-15, Faq-18, Faq-19, Kolxida və Çəhrayı 4/44 çay genotipləri üzərində aparılmışdır. Lənkəran-Astara bölgəsinə introduksiya olunmuş, xarici mühit amillərinin təsirinə həssas olan çay bitkisinin (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze) müxtəlif sort və formaları spontan dəyişkənliyin yüksək tezliyi ilə də seçilir [4]. Xarici mühitin dəyişən şəraitinə qarşı çox həssas olan çay bitkində baş verən spontan dəyişkənliyin təsirindən mövcud sort və formalarda genetik müxtəliflik yaranmışdır. Nəticələrimizə görə, Lənkəran-Astara bölgəsində becərilən çay genotiplərinin arasında genetik müxtəliflik yüksəkdir. RAPD markerləri vasitəsi ilə aparılan filogenetik analiz zamanı çay genotipləri arasında genom səviyyəsində yüksək bir genetik fərqlənmə olduğu müəyyən edilmişdir [5].

Tədqiqat obyektlərində genetik müxtəlifliyinin qiymətləndirilməsi üçün RAPD markerlərindən istifadə edilmiş, polimorfizmin mövcudluğu orta hesabla 50% və 95% arasında dəyişdiyi müəyyən edilmişdir. Test edilən genotiplər arasındakı genetik oxşarlıq isə 0.445 ilə 0.819 arasında dəyişmiş və ortalama 0.512-yə bərabər olmuşdur [5]. Eyni zamanda əldə edilən nəticələr genetik oxşarlığı aşağı olan (0.445) sort (Fərmançay 1/73 və "Lənkəran") və formaların ("Faq-11" və "Faq-18") morfoloji xüsusiyyətləri ilə, genetik oxşarlığı yüksək olan (0.819) sort Fərmançay 1/73 və "Xəzər 3/341" və formaların ("Faq-13", "Faq-14", "Faq-15") morfoloji xüsusiyyətləri və keyfiyyət göstəriciləri arasında korelativ əlaqənin olmasını göstərdi. Yerli sortlar arasında genetik müxtəlifliyin tədqiqi, iqtisadi cəhətdən daha qiymətli sortların müəyyən edilməsi mövzusu həmişə aktuallığı ilə diqqəti cəlb edir və bu istiqamətdə tədqiqatlara geniş yer verilir.

Material və metodika

Tədqiqat işləri 2020-2021-ci illərdə Meyvəçilik və Çayçılıq Elmi Tədqiqat İnstitutunun Lənkəran çay filialının sınaq təcrübə zonasında becərilən çay bitkisinin (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze) müxtəlif sort və forma üzərində aparılmışdır. Genetik markerlərdən istifadə edilərək genetik müxtəlifliyi müəyyənləşdirilmiş sort və formaların genofondu öyrənilmiş, daha məhsuldar sort və formaların kəmiyyət və keyfiyyət göstəricilərinə təsir edən mühit amilləri tədqiq olunmuşdur.

Nəticələr və onların müzakirəsi

Tədqiqat işində Lənkəran-Astara bölgəsində becərilən çay bitkisinin (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze) genetik markerlərdən istifadə edilərək müxtəlifliyi öyrənilmiş müxtəlif sort və formaların genofondu əsasında kəmiyyət və keyfiyyət göstəricilərinə təsir edən müəyyən amillər tədqiq olunmuşdur.

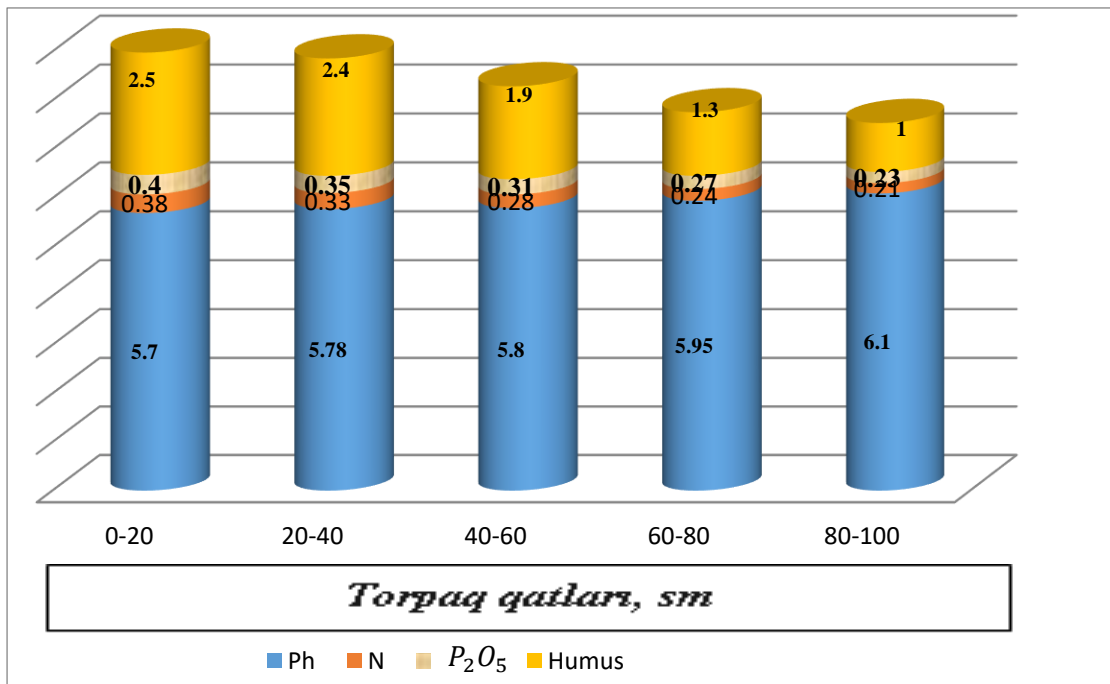
Respublikamızda çay bitkisinin inkişafı üçün böyük iqtisadi potensiala malik təbii şəraiti ən əlverişli olan bölgə Lənkəran iqtisadi rayonudur. Həmçinin Lənkəran bölgəsi respublika üzrə əhalinin torpaqla ən az təmin olunduğu zonalardan da biridir. Bu baxımdan bölgənin torpaq fondundan səmərəli istifadə problemi, onun çay, sitrus və digər bitkilərin təyinatları üzrə düzgün bölüşdürülməsi indiki şəraitdə aktuallaşmışdır [1]. Məlumdur ki, hər bir mədəni bitkinin özünün bioloji xüsusiyyətindən asılı olaraq müəyyən torpaq və iqlim şəraitinə tələbkarlığı fərqlidir. Torpağın mühitinə, mexaniki tərkibinə, şorlaşmasına, bataqlaşmasına, nəmlik dərəcəsinə və başqa xüsusiyyətlərinə hər bitkinin münasibəti eyni deyildir. Çay bitkisinin tələbatına uyğun torpaq sahəsinin seçilib müəyyən edilməsi, torpaqdan asılı olaraq əkin sahəsinin seçimi, onun becərilməsi, yararlı şəkildə istifadəyə verilməsi kənd təsərrüfatında xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Xüsusən çoxillik bitkilərin, eləcə də çay plantasiyalarının salınmasında torpaq sahələri düzgün ayrılmalıdır [2]. Lənkəran bölgəsində yayılmış torpaq tiplərinin mürəkkəb xüsusiyyətlərinin və həcmnin, çay və sitrus bitkilərinin torpağa olan tələbatının müxtəlifliyini nəzərə alaraq yeni torpaq sahələrinin əkin

dövriyyəsinə daxil edilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir [1]. Çay bitkisi yalnız müəyyən istilik və rütubət şəraitində böyüyür və inkişaf edir. Çünki, onun vətəni rütubətli subtropik və tropik ölkələridir. Ona görə də bu bitkinin bioloji və vegetativ xüsusiyyətləri adi bitkilərdən çox fərqlənir. Müşahidələr zamanı məlum olmuşdur ki, çay bitkisinin məhsuldarlığı havanın nisbi rütubətliliyi, quraqlığa davamlılıq dərəcəsi və quraq keçən aylarda yağışlı günlərin sayı ilə daha sıx korelyativ əlaqəlidir.

Genetik müxtəlifliyinə görə fərqlənən sort və formaların əkildiyi sahələrin torpaqlarının aqrokimyəvi xüsusiyyətləri (pH, N, P₂O₅, K və hüms tərkibi) öyrənilmişdir. Çay bitkisi pH 4.5 ilə 6.0 arasında optimal böyümə göstərir. Torpağın pH-ı 4,5-dən turşu istiqamətinə və ya 6,0-dan qələvi istiqamətə dəyişdiyi zaman çay bitkisinin inkişafına mənfi təsir göstərir. Çayaltı torpaqlarımızda pH-ın əhəmiyyətli və arzuolunmaz şəkildə azalmasının əsas səbəblərindən biri də bu torpaqlarımızın birtərəfli və bol ammonium sulfat gübrəsi ilə gübrələnməsidir. Çay altına yalnız o torpaqlar yararlı sayılır ki, onların 80-100 sm dərinliyə qədər pH-4-6,5 və qurunt sularının səviyyəsi 100 sm-dən aşağı olsun. Lənkəran-Astara bölgəsində çay plantasiyaları altına ilk növbədə sarı dağ-meşə torpaqları, sarı podzollu torpaqlar və sarı-podzollu qleyli torpaqlar istifadə edilir. Tədqiq olunmuş çay sort və formaların becəriləndiyi məhsuldar çay sahəsinin (diaqram 1) və yeni salınmış çay sahəsinin (diaqram 2) torpaq (səthdən şaquli istiqamətdə müxtəlif dərinliklərdə (sm-lə) 0-20; 20-40; 40-60; 60-80; 80-100) təhlili aparılmışdır.

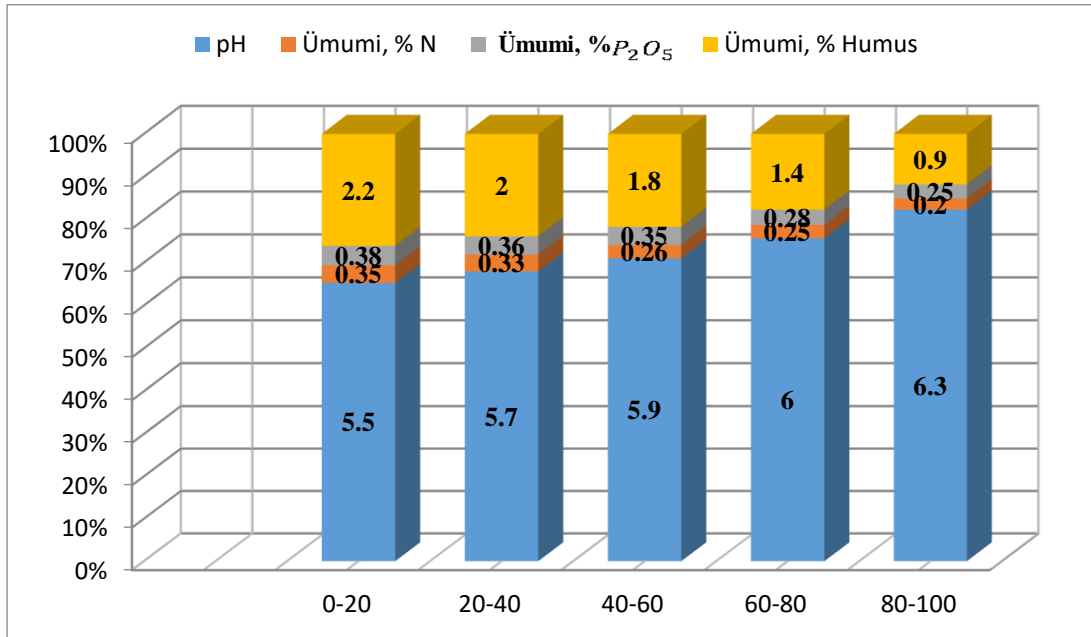
Diaqram 1

Meyvəçilik və Çayçılıq Elmi Tədqiqat İnstitutunun Lənkəran Çay Filialının məhsuldar çay sahəsinin torpaq təhlili



Diaqram 2

Meyvəçilik və Çayçılıq Elmi Tədqiqat İnstitutunun Lənkəran Çay Filialının yeni salınmış çay sahəsinin torpaq təhlili

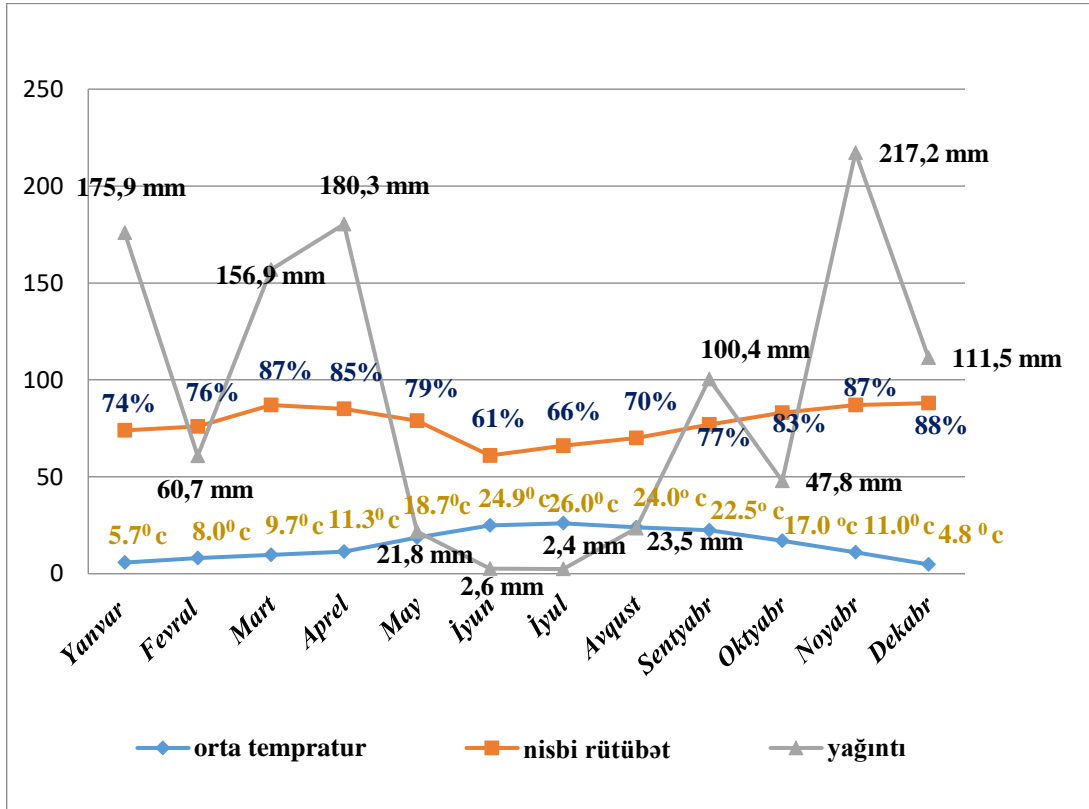


Çay plantasiyaları salınarkən yerin iqlim və torpaq şəraitinin analizi aparılmalıdır, eyni zamanda relyefini, dəniz səviyyəsindən hündürlüyünü və zərərli küləklərdən müdafiəsini bilmək lazımdır. Çay plantasiyalarından ötrü dəniz səviyyəsindən 600 m hündürlükdə olan bütün düzən sahələr və maililiyi 20 dərəcəyə qədər yamaclar yararlıdır [3]. Fenoloji müşahidələr məhsula düşmüş 7-8 illik çay kolları üzərində aparılmış, bu müddətdə bölgə ərazisində aylar üzrə havanın orta nisbi rütübətliliyi və aylıq yağıntı miqdarı haqqında rəsmi statistik məlumatlar Cənub Regional Hidrometeorologiya Mərkəzindən (CRHM) götürülmüşdür. Tədqiqat materialına aid bitkilərin quraqlığa davamlılığı fenoloji müşahidə metodlarından istifadə edilərək tədqiq edilmişdir. Aparılan müşahidələrdən məlum olmuşdur ki, orta illik yağıntının miqdarı 1200-1500 mm-dən və havanın nisbi rütübətliliyi 70-75%-dən yüksək olan ərazilədə çay bitkisi normal böyüyüb inkişaf edir Tədqiqat apardığımız illərdə, xüsusən çay bitkisinin vegetasiyasının zəruri mərhələsində - yaz-yay aylarında (2020 -2021-cu illərdə) illik yağıntının miqdarı və rütubətin faizi normadan aşağı olmuşdur (qrafik 1,2). Çay bitkisinin iqlim faktorları içərisində ən mühümləri: istilik, işıq, havanın rütübətliliyi, atmosfer çöküntüləri, külək sayılır [3]. Apardığımız müşahidələr göstərir ki, atmosfer yağıntılarının il boyu bərabər paylanmaması (1200-1300 mm-dən az), anomal istilər nəticəsində çay bitkisinin normal məhsul verməsi üçün lazım olan rütubətin (70-75%-dən az) çatışmaması, dəniz səviyyəsindən hündürlüyünün dəyişməsi məhsuldar forma-klonlarının genetik davamlılığını zəiflədir. Torpaq və havada su çatışmazlığı zərif zoğların boyatma qüvvəsini zəiflədir, yarpaqlar kobudlaşır və nəticədə məhsuldarlıq aşağı düşür [1]. Çay bitkisinin toplanmış yeni kolleksiya sahəsində genetik müxtəlifliyi öyrənilmiş FAQ-11 və

4/44 Çəhrayı sort və formaları arasında genetik fərqlilik eyni zamanda onların bioloji xüsusiyyətlərində də özünü göstərmişdir (Şəkil 1, 2).

Qrafik 1

Lənkəran bölgəsində 2020-ci il ərzində orta aylıq yağıntı miqdarının (mm-lə), orta aylıq nisbi rütübətinin (%-lə) və orat aylıq tempratur göstəricilərinin müqayisəli qrafik təhlili



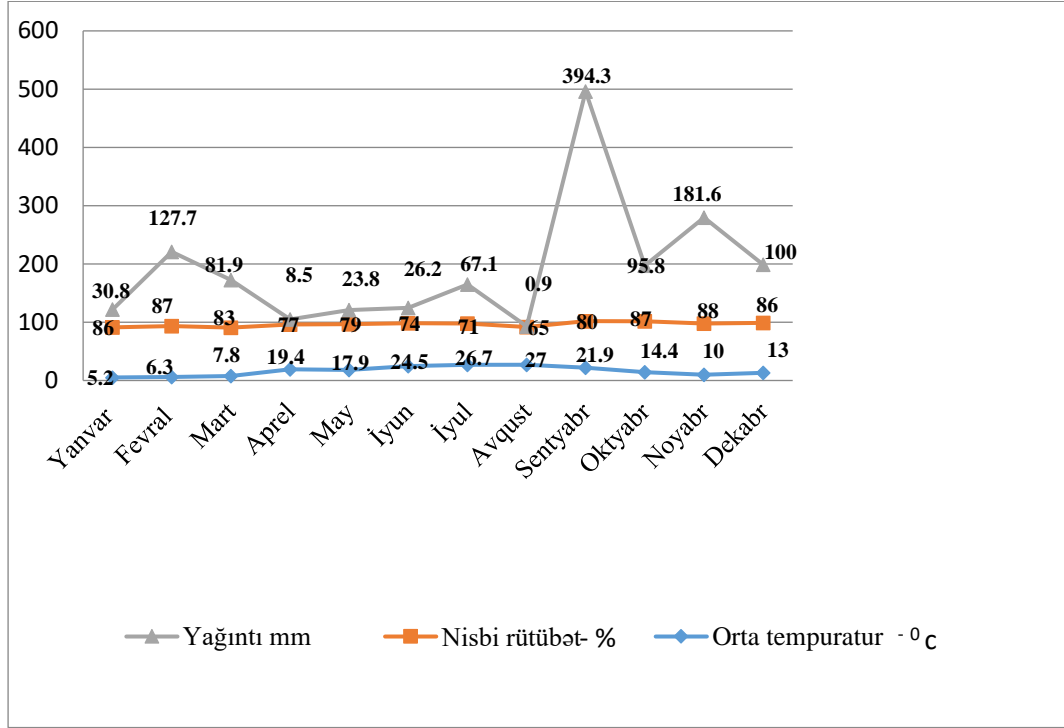
Şəkil1. FAQ-11



Şəkil 2.4/44 Çəhrayı

Qrafik 2

Lənkəran bölgəsində 2021-ci il ərzində orta aylıq yağıntı miqdarının (mm-lə), orta aylıq nisbi rütübətinin (%-lə) və orat aylıq tempratur göstəricilərinin müqayisəli qrafik təhlili



Müşahidələrimiz tədqiqat işində qarşıya qoyulan məqsədə uyğun olaraq aylar üzrə havanın rütübəti və ya quraq keçməsi nəzərə alınmaqla bitkinin vegetasiyası dövründə (ilin bütün aylarında) kolların tumurcuqlanma, zoğ əmələ gətirmə və boy atma kimi xüsusiyyətlər üzərində aparılmışdır. Rayonlaşmış “Azərbaycan-2” (nəzarət) ilə müqayisədə vegetasiyanın başlanması adətən aprel ayının avvəllərinə təsadüf etdiyi halda, yeni rayonlaşdırılmış sortlar içərisində ən tez vegetasiya başlama-“Fərmançay 1/73”, “Lənkəran”, “Xəzər 3/341” “Fərmançay çəhrayı” sortlarında müşahidə edilmişdir. Qeyd olunan sortlar klon seleksiyası yolu ilə alınmışdır.

Alınmış nəticələr:

1. Lənkəran-Astara bölgəsində çay bitkisinin mövcud sort və formaların genotiplərində fərqlilik ilə bioloji potensialları arasında korelyativ əlaqə mövcuddur
2. Atmosfer yağıntılarının il boyu bərabər paylanmaması (1200-1300 mm-dən az), anomal istilər nəticəsində çay bitkisinin normal məhsul verməsi üçün lazım olan rütübətin (70-75%-dən az) çatışmaması, dəniz səviyyəsinin hündürlüyünün dəyişməsi məhsuldar sort və formaların genetik davamlılığını zəiflədir.

3. Genetik müxtəlifliyi öyrənilmiş sort və formalarda spontan mutagenез zamanı xromosom dəyişmələrinin tezliyi ilə genetik müxtəlifliyin yaranması arasında asılılıq mövcuddur.

Ədəbiyyat

1. Babayev, X. (2018). Azərbaycanın Lənkəran zonasında çayayararlı torpaqların seçilməsi və onlardan səmərəli istifadə edilməsi. *Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi Xəbərləri*, 1, 33-39.
2. Quliyev F.A., Məmmədov C.Ş., Abdullayev F.M, (2012). *Azərbaycanda çayın (Teha sinensis L) becərilməsinin elmi-praktik əsasları*. Bakı. 333 s.
3. Əhmədov Ə-C. İ. *Azərbaycan çayı*. Monoqrafiya. Bakı, ADİU-nin nəşriyyatı, 2010. 170 s.
4. Hüseynov, M.B. (2020). Lənkəran-Astara bölgəsində becərilən çay bitkisinde spontan mutagenез zamanı xromosom dəyişmələrinin tezliyi. *Azərbaycan Respublikası, Odlar Yurdu Universitetinin Elmi və Pedaqoji Xəbərləri*, Bakı. 56, 295-301.
5. Huseynov M.B., Suleymanova Z.C., Ocaqi C., Mammadov A.Ch. (2020). Molecular phylogeny of Azerbaijan tea (*Camellia sinensis* (L.) genotypes by using RAPD markers. *Integration of Education, Science and Business in Modern Environment: Summer Debates: abstracts of the 2nd International Scientific and Practical Internet Conference*, August 17-18, 149.
6. Karak, T., Bhagat, R.M., (2010). Trace Elements in Tea Leaves, Made Tea and Tea Infusion: A Review, *Food Research International*, 43, 2234–2252.
7. Wambulwa, M.C., Meegahakumbura, M.K., Kamunya, S., Muchugi, A., Möller, M., Liu, J., Xu, J.C., Li, D.J., and Gao, L.M., (2017). Multiple origins and a narrow genepool characterise the African tea germplasm: Concordant patterns revealed by nuclear and plastid DNA markers, *Science Report*, 7, 4053.
8. Karunarathna, K.H.T., Mewan, K.M., Weerasena, O.V.D.S.J., Perera, S.A.C.N., Edirisinghe, E.N.U., and Jayasoma, A.A. (2018) Understanding the genetic relationships and breeding patterns of Sri Lankan tea cultivars with genomic and EST-SSR markers, *Scientia Horticulturae*, 240, 72–80.

GENE POOL OF A TEA PLANT GROWN IN THE LENKORAN-ASTARA REGION

Mammadhuseyn Huseynov

Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

With the help of molecular markers, the genetic diversity of varieties and forms of the tea plant (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze) growing in the Lankaran-Astara region was studied, and their gene pool

was investigated. Among molecular marker systems, RAPD (Randomly Amplified Polymorphic DNA) markers are the most widely used method for detecting and analyzing phylogenesis in terms of speed, simplicity, and genetic diversity [5]. It has been established that there is a correlation between the differences in the genotypes of existing varieties and forms and biological capabilities (productivity, biochemical and quality indicators of raw materials, economic efficiency). Observations have shown that tea plant productivity is more closely related to relative humidity, drought tolerance, and the number of rainy days during dry months.

Key words: *Camellia sinensis* (L.) Kuntze, genetic diversity, gene pool, relative humidity

ГЕНЕФОНД ЧАЙНОГО РАСТЕНИЯ, ВЫРАЩИВАЕМОГО В ЛЯНКЯРАНСКО-АСТАРИНСКОМ РАЙОНЕ

Мамедгусейн Гусейнов

Лянкяранский государственный университет, Лянкярань, Азербайджан

С помощью молекулярных маркеров изучено генетическое разнообразие сортов и форм чайного растения (*Camellia sinensis* (L.) Kuntze), произрастающих в Лянкяранско-Астаринском районе, и изучен их генофонд. Среди систем молекулярных маркеров маркеры RAPD (Randomly Amplified Polymorphic DNA) являются наиболее широко используемым методом обнаружения и анализа филогенеза по скорости, простоте и генетическому разнообразию [5]. Установлено, что существует коррелятивная связь между различиями генотипов существующих сортов и форм и биологическими возможностями (продуктивностью, биохимическими и качественными показателями сырья, экономической эффективностью). Наблюдения показали, что продуктивность чайного растения более тесно связана с относительной влажностью, засухоустойчивостью и количеством дождливых дней в засушливые месяцы.

Ключевые слова: *Camellia sinensis* (L.) Kuntze, генетическое разнообразие, генофонд, относительная влажность

Daxil oldu: 01.03.2022;

Çapa qəbul edildi: 30.05.2022;

Çap edildi: 20.06.2022

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМОМ И С ИЗМЕРИМЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Габил Ягуб

Натиг Ибрагимов

Низами Сулейманов

Кафказ университет, Карс, Турция

Лянкяранский государственный университет, Лянкярань, Азербайджан

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

э-почта: gabilya@mail.ru

э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru

Резюме. В данной работе рассматривается вторая начально-краевая задача для линейного одномерного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримым ограниченным комплексным потенциалом, зависящим только от времени. При этом с помощью метода Галеркина доказывается теорема о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, градиентное слагаемое, комплексный потенциал, метод Галеркина.

1. Введение

Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретические, так и практические интересы [4, 5, 13]. Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений без специального градиентного слагаемого ранее изучены, например, в работах [7, 8, 9, 10, 16, 17, 18] и др., а со специальным градиентным слагаемым, например, в работах [1, 6, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25,] и др. Во всех этих работах от коэффициентов уравнения Шредингера, зависящих от временной переменной, потребовались дифференцируемость по временной переменной. Следует отметить, что начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера без специального градиентного слагаемого, когда коэффициенты зависят только от временной переменной и являются измеримыми ограниченными функциями ранее изучены в работе [17]. Однако начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной почти не изучены. Поэтому изучение разрешимости второй начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения Шредингера со

специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной представляет немалый научный и практический интерес.

2. Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $T > 0$ - заданные числа, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega_t \equiv (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$; $C^k([0, T], B)$ - банахово пространство функций, k -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_p(0, l)$ - лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0, l)$ со степенью $p \geq 1$; $L_2(0, T; B)$ - банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_\infty(0, T; B)$ - банахово пространство измеримых ограниченных на $(0, T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B ; Соболевы пространства $W_p^k(0, l)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$ $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, определены, например, в работах [11, 12, 19].

Рассмотрим следующую вторую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ из условий:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v_0(t)\psi + iv_1(t)\psi = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T), \quad (2.2)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0$ - заданное число; $a(x), a_1(x, t), v_0(t), v_1(t)$ - измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \left| \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \right| \leq \mu_3, \forall x \in (0, l), \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 = const > 0; \quad (2.4)$$

$$|a_1(x, t)| \leq \mu_4, \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu_5, \left| \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \right| \leq \mu_6, \forall (x, t) \in \Omega,$$

$$a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = const > 0; \quad (2.5)$$

$$|v_s(t)| \leq b_s, s = 0, 1, \forall t \in (0, T), b_0, b_1 = const > 0; \quad (2.6)$$

$\varphi(x), f(x, t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0, l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0; \quad (2.7)$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T); \quad (2.8)$$

Символ $\overset{0}{\forall}$ означает “при почти всех”.

Определение 2.1. Под решением второй начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) будем понимать функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in \Omega$, а начальному условию (2.2) для почти всех $x \in (0, l)$ и краевым условиям (2.3) для почти всех $t \in (0, T)$.

3. Разрешимость второй начально-краевой задачи.

В этом разделе используя метод Галеркина будем доказывать теорему о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи.

Теорема 3.1. Пусть функции $a(x), a_1(x, t), v_0(t), v_1(t), \varphi(x), f(x, t)$ удовлетворяют условиям (2.4)-(2.8). Тогда вторая начально-краевая задача (2.1)-(2.3) имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 (\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2), \quad (3.1)$$

где $c_0 > 0$ не зависит от φ, f .

Доказательство. Возьмем какую-либо фундаментальную в $W_2^2(0, l)$ и ортонормированную в $L_2(0, l)$ систему функций $u_k = u_k(x), k = 1, 2, \dots$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), x \in (0, l), X'(0) = X'(l) = 0 \quad (3.2)$$

при $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x). \quad (3.3)$$

Можем отметить, что спектральная задача (3.2) является спектральной задачей, изученной в работе [11]. Поэтому с помощью результатов этой работы можем утверждать, что спектральная задача (3.2) имеет нетривиальные решения $X = u_k(x), k = 1, 2, \dots$ при $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$, образующих спектр задачи и эти решения образуют базис в пространствах $W_2^1(0, l), W_2^2(0, l)$, и справедливы условия ортонормированности в $L_2(0, l)$ и ортогональности в $W_2^1(0, l), W_2^2(0, l)$ в виде:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, \quad (3.4)$$

где δ_k^m символы Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \quad k, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

Ясно, что функции $u_k(x), k = 1, 2, \dots$ ортогональны и в следующем смысле:

$$[u_k, u_m] = (Lu_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l \left(a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots; \quad (3.6)$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(l)} = \lambda_k^2 \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

В силу предположения $a(x) \geq \mu_0 > 0$ все собственные значения $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ вещественны, положительны и расположены в порядке возрастания:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

По методу Галеркина приближенное решение будем искать в виде:

$$\psi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) u_k(x), \quad (3.9)$$

где $c_k^N(t) = (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}, k = 1, 2, \dots, N$ определяются из условий:

$$i \frac{d}{dt} (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} - (L\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + i \left(a_1(\cdot, t) \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} + (v_0(t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + i (v_1(t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, t \in [0, T], \quad (3.10)$$

$$c_k^N(0) = (\psi^N(\cdot, 0), u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.11)$$

Здесь $f_k(t) = (f(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}, \varphi_k = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)}, k = 1, 2, \dots, N$. Система (3.10) есть нечто иное, как система N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с правой частью $f_k \in L_2(0, T)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача Коши (3.10), (3.11) имеет единственное обобщенное решение из пространства $W_2^1(0, T)$ (см: например, [2, 3, 14,]).

Теперь установим оценку для решения этой задачи Коши.

Лемма 3.1. Для решения системы (3.10), (3.11) верна оценка:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{k=1}^N |c_k^N(t)|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left| \frac{dc_k^N(t)}{dt} \right|^2 dt &\leq \|\psi^N\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^2,0(\Omega)}^2 \right), t \in [0, T], N = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Доказательство леммы. Умножим каждое k -ое уравнение из (3.10) на свое $\bar{c}_k^N(t)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от нуля до $t \leq T$. В результате, используя формулу интегрирования по частям и условию $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0, k = 1, 2, \dots$, имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N - a_0 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + ia_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N - a(x) |\psi^N|^2 + v_0(\tau) |\psi^N|^2 + iv_1(\tau) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и в полученном равенстве используя дифференцируемость функций $a_1(x, t)$ получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\psi^N|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |\psi^N|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} \text{Im}(f \bar{\psi}^N) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

Ввиду того, что функция $a_1(x, t)$ удовлетворяют однородным граничным условиям $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$, второе слагаемое равняется нулю. С учетом этого и условий на коэффициенты уравнения из равенства (3.14) нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq \|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0, l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(., \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Используя формулу (3.9) можем написать следующее соотношение:

$$\|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0, l)}^2 = \sum_{k=1}^N |c_k^N(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 = \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2. \quad (3.16)$$

С помощью этого соотношения из (3.15) получим справедливость неравенства:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(., \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

С помощью этого неравенства и леммы Гронуолла нетрудно получить справедливость оценки:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_2 \left(\|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.17)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial x}$. С этой целью и умножим k -ое уравнение системы (3.10) на свое $\lambda_k \bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, полученное равенство проинтегрируя по интервалу $(0, t)$ имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} L \bar{\psi}^N - |L \psi^N|^2 + ia_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + iv_1(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.18)$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} L \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} L \psi^N \right) + ia_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} L \psi^N \right) \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) (\psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{\psi}^N L \psi^N) + iv_1(\tau) (\psi^N L \bar{\psi}^N + \bar{\psi}^N L \psi^N) \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) - \bar{f}(x, \tau) L \psi^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

Используя формулу (3.3) для оператора L и формулу интегрирования по частям, а

также граничные условия $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} i \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + a(x) \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N \right) dx d\tau, \quad (3.20)$$

$$\int_{\Omega_t} ia_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(ia_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = - \int_{\Omega_t} ia_0 a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} dx d\tau + \int_{\Omega_t} ia(x) a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N dx d\tau, \quad (3.21)$$

$$\int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + iv_1(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) + iv_1(\tau) \psi^N \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_0(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_0(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(ia_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + iv_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_t} f(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau &= \int_{\Omega_t} f(x, \tau) \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau = \\
 &= \int_{\Omega_t} \left(a_0 \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} + a(x) f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

С учетом этих равенств (3.20)-(3.23) из равенства (3.19) получим справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned}
 &i \int_{\Omega_t} a_0 \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right) dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a(x) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \psi^N \right) dx d\tau - \\
 &- i \int_{\Omega_t} a_0 a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a(x) a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \psi^N \right) dx d\tau + \\
 &+ 2i \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau = 2i \int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} \right) dx d\tau + \\
 &+ 2i \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} (f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a(x) \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau - \\
 &- \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
 &+ \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} (a(x) a_1(x, \tau) |\psi^N|^2) dx d\tau - \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} (a(x) a_1(x, \tau)) |\psi^N|^2 dx d\tau + \\
 &+ 2 \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau = 2 \int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} \right) dx d\tau + \\
 &+ 2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} (f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

В силу условий $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$ третье и пятое слагаемые левой части этого равенства равняются нулю. С учетом этого и с помощью условий на коэффициенты уравнения, а также неравенства Коши-Буняковского из этого равенства нетрудно получить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned}
 &a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \mu_0 \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(., 0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \mu_1 \|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0, l)}^2 + \\
 &+ a_0 (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (\mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_5 + 2\mu_1 b_1 + \mu_1) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau +
 \end{aligned}$$

$$+a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \mu_1 \int_{\Omega_t} |f(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.25)$$

С помощью формулы (3.9) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, 0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_3 \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2. \quad (3.26)$$

В силу этого неравенства и соотношения (3.16), а также оценки (3.17) из неравенства (3.25) получим справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_4 \left(\|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|f\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right) + c_5 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.27)$$

Отсюда с помощью леммы Гронуолла получим справедливость следующей оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_6 \left(\|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|f\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.28)$$

Теперь оценим $\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$. С этой целью и умножим k -ое уравнение системы (3.10)

на свое $\lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, используя равенство $Lu_k = \lambda_k u_k$ с помощью формулы интегрирования по частям преобразуя каждый интеграл полученного равенства имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & i \sum_{k=1}^N \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N(x, t)) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) - \sum_{k=1}^N \int_0^l L(L\psi^N(x, t)) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \\ & + i \sum_{k=1}^N \int_0^l L \left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N(x, t)}{\partial x} \right) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \sum_{k=1}^N \int_0^l v_0(t) L\psi^N(x, t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \\ & + i \sum_{k=1}^N \int_0^l v_1(t) L\psi^N(x, t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) = \sum_{k=1}^N \int_0^l Lf(x, t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t). \end{aligned}$$

В этом равенстве опять используя равенство $Lu_k = \lambda_k u_k$ и формулу (3.9) после интегрирования по t от нуля до $t \leq T$ получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} & i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} L(L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau + i \int_{\Omega_t} L \left(a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right) L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ & + \int_{\Omega_t} v_0(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau = \int_{\Omega_t} Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Теперь в этом равенстве преобразуем второе и третье слагаемые левой части. С помощью формулы:

$$L(L\psi^N) = -a_0 \frac{\partial}{\partial x^2} (L\psi^N) + a(x) L\psi^N \quad (3.30)$$

и формулы интегрирования по частям можем написать следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t} L(L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} a_0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a(x) |L\psi^N|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.31)$$

Для преобразования третьего слагаемого левой части равенства (3.29) сначала преобразуем под интегральное выражение $L\left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right)$. С помощью формулы оператора L имеем:

$$\begin{aligned} L\left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) &= -a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) + a(x) a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} = -a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} - \\ &- 2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} - a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} + 2 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} L\psi^N + a_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Тогда с помощью формул (3.31) и (3.32) равенство (3.29) можем написать в виде:

$$\begin{aligned} &i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} a_0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) \right|^2 dx d\tau - \int_{\Omega_t} a(x) |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\ &- i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N dx d\tau - i \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} + a_1(x, \tau) \frac{da(x)}{dx} \right) \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ &+ i \int_{\Omega_t} 2 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} v_0(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau = \int_{\Omega_t} Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение имеем:

$$\begin{aligned} &i \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial t} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau + \\ &+ 4i \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau - \\ &- i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} L\psi^N \right) dx d\tau - \\ &- i \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} + a_1(x, \tau) \frac{da(x)}{dx} \right) (\psi^N L\bar{\psi}^N + \bar{\psi}^N L\psi^N) dx d\tau + \\ &+ 2i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau = 2i \int_{\Omega_t} \text{Im} (Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Теперь в этом равенстве преобразуем третье слагаемое левой части. Ясно, что имеет место равенство:

$$i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau = i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |L\psi^N|^2 \right) dx d\tau -$$

$$-i \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau. \quad (3.35)$$

Если учесть это равенство в левой части равенства (3.34), то отсюда в силу условий $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$ получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^l |L\psi^N(x, t)|^2 dx - \int_0^l |L\psi^N(x, 0)|^2 dx + \\ & + 3 \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau - \\ & - 2 \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau + \\ & + 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau = 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Используя формулу $L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) Lu_k(x)$ и условие (3.11) имеем:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) Lu_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k Lu_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x). \quad (3.37)$$

С другой стороны можем написать следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^l \varphi(\xi) u_k(\xi) d\xi u_k(x) = \sum_{k=1}^N \int_0^l \varphi(\xi)(x) Lu_k(\xi) d\xi u_k(x).$$

С помощью формулы интегрирования по частям имеем:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x) = \sum_{k=1}^N \int_0^l L\varphi(\xi)(x) u_k(\xi) d\xi u_k(x).$$

Учитывая это равенство в равенстве (3.37) получим следующее равенство:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N \int_0^l L\varphi(\xi)(x) u_k(\xi) d\xi u_k(x) = \sum_{k=1}^N (L\varphi)_k u_k(x) \quad (3.38)$$

В силу этой формулы нетрудно установить справедливость соотношения:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 = \sum_{k=1}^N |(L\varphi)_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(L\varphi)_k|^2 = \|L\varphi\|_{L_2(0, l)}^2.$$

Из этого соотношения и вида оператора L можем установить справедливость неравенства:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_7 \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2. \quad (3.39)$$

С учетом этого соотношения из равенства (3.36) можем получить справедливость неравенства:

$$\|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_7 \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 &+3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| |L\psi^N|^2 dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right| |L\psi^N| dx d\tau + \\
 &+2 \int_{\Omega} \left(2|a(x)| \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| + |a_1(x, t)| \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \right) |\psi^N| |L\psi^N| dx d\tau + \\
 &+2 \int_{\Omega} |v_1(\tau)| |L\psi^N|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega} |Lf(x, \tau)| |L\psi^N(x, \tau)| dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Используя условия на коэффициенты уравнения и применяя неравенство Коши-Буняковского из этого неравенства с помощью оценок (3.17), (3.28) и неравенства:

$$\|Lf\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_8 \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \quad (3.41)$$

имеем:

$$\|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)}^2 \leq c_9 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,t)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right) + c_{10} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,t)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

С помощью леммы Гронуолла из этого неравенства получим справедливость оценки:

$$\|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)}^2 \leq c_{11} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,t)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.42)$$

Используя формулу для оператора L имеем:

$$\|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)} \geq a_0 \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,t)} - \|a(\cdot)\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)}.$$

Отсюда получим справедливость неравенства:

$$a_0 \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,t)} \leq \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)} + \mu_1 \|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)}.$$

Из этого неравенства в силу оценок (3.17) и (3.42) имеем:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,t)}^2 \leq c_{12} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,t)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.43)$$

Суммируя (3.17), (3.28) и (3.43) получим справедливость следующей оценки:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{W_2^2(0,t)}^2 \leq c_{13} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,t)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.44)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial t}$. С этой целью каждое k -ое уравнение системы (3.10) на свое

$\frac{d\bar{c}_k^N(t)}{dt}$ и все полученные равенства просуммируем по $k=1$ до $k=N$. Тогда

полученное уравнение интегрируя по интервалу $(0, T)$ имеем:

$$\int_{\Omega} \left(i \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + ia_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} - a(x) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega} \left(v_0(t) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + iv_1(t) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dxdt = \int_{\Omega} f \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} dxdt .$$

Отсюда можем написать следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dxdt = \\ & = -i \int_{\Omega} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} - ia_1(x,t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} + a(x) \psi^N - v_0(t) \psi^N - iv_1(t) \psi^N + f(x,t) \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} dxdt \end{aligned}$$

Из этого равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского и оценки (3.44) получим справедливость следующей оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{14} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right). \quad (3.45)$$

Интегрируя обе части оценки (3.44) по t по интервалу $(0, T)$ и полученную оценку суммируя с оценкой (3.45) получим следующую оценку:

$$\|\psi^N\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_{15} \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (3.46)$$

где $c_{15} > 0$ постоянная не зависит от N . Используя эту оценку с выбором $c_0 = c_{15}$ нетрудно доказать утверждение леммы. Лемма 3.1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы. Благодаря оценке (3.46) из последовательности $\{\psi^N(x, t)\}$ можем выделить под последовательность $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$, которая сходится к функции $\psi(x, t)$ слабо в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$. Покажем, что эта предельная функция $\psi(x, t)$ является решением редуцированной задачи (2.1)-(2.3) в смысле определения 2.1. С этой целью сначала докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in \Omega$. Поэтому при $N = N_m$ уравнение из (3.10) умножим на произвольную функцию $\bar{\eta}_k(t)$, где $\bar{\eta}_k(t)$ есть k -й коэффициент Фурье произвольной функции $\bar{\eta}(x, t)$ из пространства $L_2(\Omega)$, то есть $\bar{\eta}_k(t) = (\bar{\eta}(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}$. Полученные уравнения складываем по k от $k=1$ до $N' \leq N_m$ и результат проинтегрируем в пределах от нуля до T . Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^{N_m}}{\partial x^2} + a_1(x,t) \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial x} - a(x) \psi^{N_m} + \right. \\ & \left. + v_0(t) \psi^{N_m} + iv_1(t) \psi^{N_m} - f(x,t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dxdt = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$, $N' \leq N_m$. Учитывая слабую сходимость под последовательности $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ к функции $\psi(x,t)$ в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$ и переходя к пределу по $N_m, m=1,2,\dots$ в интегральном тождестве (3.47) получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_1(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi - f(x,t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x,t) dx dt = 0$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$. В виду того, что $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$

является частичной суммой ряда $\bar{\eta}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$, при $N' \rightarrow \infty$ частичная сумма $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t)$ сходится к функции $\bar{\eta}(x,t)$ в $L_2(\Omega)$. Тогда с учетом этого если переходить к пределу в последнем тождестве, то получим того, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_1(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi - f(x,t) \right) \bar{\eta}(x,t) dx dt = 0 \quad (3.48)$$

для любой функции $\eta = \eta(x,t)$ из пространства $L_2(\Omega)$. Отсюда заключаем, что предельная функция $\psi(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x,t) \in \Omega$. Теперь покажем, что эта функция $\psi(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет начальному условию (2.2) для почти всех $x \in (0,l)$, то есть условию $\psi(x,0) = \varphi(x), \forall x \in (0,l)$. В силу теорем компактного вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0,T], L_2(0,l))$ можем написать следующее соотношение:

$$\|\psi^{N_m}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} \rightarrow 0 \quad (3.49)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0,l)} \leq \|\psi(\cdot, 0) - \psi^{N_m}(\cdot, 0)\|_{L_2(0,l)} + \|\psi^{N_m}(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0,l)}. \quad (3.50)$$

Используя предельное соотношение (3.49) при $t=0$ получаем, что первое слагаемое в правой части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому покажем, что и второе слагаемое в правой части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ также стремится к нулю. Используя формулу (3.9) имеем:

$$\psi^{N_m}(x, 0) = \sum_{k=1}^{N_m} c_k^{N_m}(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k u_k(x) = \varphi^{N_m}(x).$$

Ввиду того, что $\varphi^{N_m}(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для функции $\varphi = \varphi(x)$ из пространства $W_2^2(0, l)$, удовлетворяющей условиям $\frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0$. С учетом этого если переходить к пределу во втором слагаемом правой части неравенства (3.50), то при $m \rightarrow \infty$ получим, что оно стремится к нулю, то есть имеет место предельное соотношение:

$$\|\psi^{N_m}(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (3.51)$$

Таким образом, с учетом этого предельного соотношения и предельного соотношения (3.49) при $t = 0$ если переходить к пределу в обеих частях неравенства (3.50), то при $m \rightarrow \infty$ получим справедливость соотношения:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} = 0.$$

Из этого соотношения получаем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет условию начальному условию из (2.2), то есть $\psi(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in (0, l)$. Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3). Известно из работы [12], что для элементов под последовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ в силу теоремы о следах имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, \cdot)}{\partial x}, \frac{\partial \psi^{N_m}(l, \cdot)}{\partial x} \in L_2(0, T), m = 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

В силу свойства сходимости под последовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ получим справедливость предельных соотношений: при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, \cdot)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(0, \cdot)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0, T), \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(l, \cdot)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(l, \cdot)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0, T). \quad (3.54)$$

С другой стороны, для элементов под последовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ имеет место следующие равенства

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(s, t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N_m} c_k^{N_m}(t) \frac{du_k(s)}{dx}, s = 0, l.$$

Из этих равенств в силу условий $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ получим справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{N_m}(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.55)$$

Для $\forall \eta \in L_2(0, T)$ можем написать следующие равенства:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{N_p}(s, t)}{\partial x} \right) \bar{\eta}(t) dt + \int_0^T \frac{\partial \psi^{N_p}(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt, s = 0, l. \quad (3.56)$$

Тогда с учетом соотношений (3.56) и предельных соотношений (3.53), (3.54) если переходить к пределу в обеих частях равенств (3.51), то отсюда при $m \rightarrow \infty$ для любой функции $\eta \in L_2(0, T)$ получим справедливость соотношений:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt = 0, s = 0, l.$$

Из этих соотношений получим, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3) для почти всех $t \in (0, T)$, то есть имеет место:

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x, t)$ является решением начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) и это решение принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка (3.1), которая непосредственно следует из оценки (3.12) после перехода к нижнему пределу по слабо сходящейся под последовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из $W_2^{2,1}(\Omega)$ к функции $\psi(x, t)$. Непосредственно из оценки (3.1) следует единственность решения начально-краевой задачи (2.1)-(2.3). Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Аналогично доказывается теорема о существовании и единственности решения первой начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной, из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$.

Литература

1. Akbaba, G.D. (2011). The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient. *Master's thesis, Kars*, 71 pp. (in Turkish).
2. Алексеев, В.М., Тихомиров, В.М., Фомин, С.В. (1979). *Оптимальное управление*. М: Наука, 430 с.
3. Васильев, Ф.П. (1980). *Численные методы решения экстремальных задач*. М: Наука, 518 с.

4. Воронцов, М.А., Шмальгаузен, В.И. (1985). *Принципы адаптивной оптики*. М.: Наука, 366 с.
5. Журавлев В.М. (2001). *Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией*. Ульяновск, УлГУ, 200 с.
6. Искендеров, А., Ягуб, Г., Салманов В. (2018). Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом. *Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук*, № 4 (93), с. 28-43.
7. Искендеров, А., Ягубов, Г. (2007). Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера. *Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, Ленкорань*, с. 3-56.
8. Искендеров, А.Д., Ягубов, Г.Я. (1988). Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала. *Докл. АН СССР*, 303(5), с. 1044-1048.
9. Искендеров, А.Д., Ягубов, Г.Я. (1989). Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами. *Автоматика и телемехан.* № 12, с. 27-38.
10. Искендеров, А.Д., Ягубов, Г.Я., Мусаева, М.А. (2012). *Идентификация квантовых потенциалов*. Баку, Чашыоглу, 548 с.
11. Ладыженская, О.А. (1973). Краевые задачи математической физики. М: Наука, 408 с.
12. Ладыженская, О.А., Солонников, В.А., Уральцева, Н.Н. (1967). *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М: Наука, 736 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (1963). Квантовая механика. Нерельявистская теория. М.: Физматгиз, т. 3, 702 с.
14. Понтрягин Л.С. (1982). Обыкновенные дифференциальные уравнения. М: Наука, 332 с.
15. Ягубов, Г., Салманов, В., Ягубов, В., Зенгин, М. (2017). Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера. *Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук*. № 4 (85), с. 7-21.
16. Ягубов, Г.Я., Мусаева, М.А. (1997). Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера. *Дифференц. уравнения*, т. 33, № 12, с. 1691-1698.

17. İbragimov, N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. *International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics"*. Vol.1, № 29, pp. 61-70. (in Russian).
18. İbragimov, N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. *News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences*. No.3, pp.72-84. (in Russian).
19. Lions, J-L., Magenes, E. (1972). Non-homogeneous boundary value problems and applications - vol. 2. Berlin, 307 p.
20. Yagub, G., İbrahimov N.S., Zengin M. (2018). The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, № 2, pp. 214-232.
21. Yagub, G., İbrahimov, N.S., Zengin, M. (2021). Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a special gradient terms. *Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015)*. Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, pp.53-54.
22. Yagub, G., İbrahimov, N.S., Aksoy, N.Y. (2016). On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with special gradient terms. *Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016)*. Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.170-171.
23. Yagubov, G., Toyoğlu, F., Subaşı, M. (2012). An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*. vol. 218, iss.11, pp.6177-6187.
24. Yakub, G., İbrahimov, N.S., Zengin, M. (2021). Optimal control problem for the stationary quasi-optics equation with a special gradient term. *Advanced Mathematical Models and Applications*. Vol. 6, № 3, pp. 252-265.
25. Zengin, M., İbrahimov, N.S., Yagub G. (2021). Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term. *Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series*. № 1, pp. 27-42 .

XÜSUSİ QRADİYENT TOPLANANLI VƏ ZAMANDAN ASILI OLAN ÖLÇÜLƏBİLƏN MƏHDUD KOMPLEKS POTENSİALLI ŞREDİNGER TƏNLIYI ÜÇÜN İKİNCİ BAŞLANĞIC SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Qabil Yaqub

Natiq İbrahimov

Nizami Süleymanov

Kafkas Universiteti, Qars, Türkiyə

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

Biz bu məqalədə xüsusi qradiyentli toplanana malik və yalnız zamandan asılı olan ölçülə bilən məhdud kompleks potensiallı xətti birölcülü qeyri-stasionar Şredinger tənliyi üçün ikinci başlanğıc-sərhəd məsələsini nəzərdən keçiririk. Eyni zamanda Qalerkin üsulundan istifadə etməklə baxılan ikinci başlanğıc sərhəd məsələsinin həllinin mövcudluğu və yeganəliyi haqqında teorem isbat edilir.

Açar sözlər: Şredinger tənliyi, qradiyentli toplanan, kompleks potensialı, Qalerkin üsulu.

Gabil Yagub

Natig İbragimov

Nizami Suleymanov

Kafkas University, Kars, Turkey

Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

Baku State University, Baku, Azerbaijan

In this paper, we consider the second initial-boundary value problem for a linear one-dimensional unsteady Schrodinger equation with a special gradient term and with a measurable limited complex potential that depends only on time. At the same time, using the Galerkin method, the theorem on the existence and uniqueness of the solution of the second initial boundary value problem under consideration is proved.

Key words: Schrodinger equation, gradient term, complex potential, Galerkin method.

Daxil oldu: 01.03.2022;

Çapa qəbul edildi: 30.05.2022;

Çap edildi: 20.06.2022

APPLICATION OF FIBONACCI EXP-FUNCTION METHOD FOR SOLVING THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Jalil Manafian

University of Tabriz, Tabriz, Iran,
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

Abstract. In this work, we establish the exact solutions to the longitudinal wave motion equation in a nonlinear magneto-electro-elastic circular rod and Burgers' equations. The Fibonacci exp-function method were used to construct solitary wave solutions of nonlinear evolution equations. The Fibonacci exp-function method presents a wider applicability for handling nonlinear wave equations. It is shown that the Fibonacci exp-function methods, with the help of symbolic computation, provide a straightforward and powerful mathematical tool for solving nonlinear evolution equations in mathematical physics.

Key words: solitary wave solutions, Fibonacci exp-function method, Burgers' equation, longitudinal wave motion equation.

Introduction

In the recent years, the investigation of the traveling wave solutions for nonlinear partial differential equations plays an important role in the study of nonlinear physical phenomena. During the past decades, both mathematicians and physicists have devoted considerable effort to the study of exact and numerical solutions of the nonlinear ordinary or partial differential equations corresponding to the nonlinear problems. Many powerful methods have been presented. For instance, the Hirota's bilinear method [11], the inverse scattering transform [1], F-expansion method [19], sine-cosine method [21], homotopy perturbation method [2, 3], homotopy analysis method [4], variational iteration method [3, 10], tanh-function method [8], generalized tanh-coth method [13, 14, 17], Bäcklund transformation [18], Exp-function method [5, 6, 7, 12 15], $(\frac{G'}{G})$ -expansion method [9] and so on. The Burgers equation [16]

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad (1)$$

is a nonlinear partial differential equation of second order which appears in various areas of applied mathematics, such as modeling of fluid dynamics, turbulence, boundary layer behavior, shock wave formation, and traffic flow. Based on the constitutive relation for transversely isotropic piezoelectric and piezo-magnetic materials, combined with the differential equations of motion, Xue et al. [22] have derived a longitudinal wave motion equation in a MEE circular rod of the form,

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - \left(\frac{c_0^2}{2} u^2 + Nu_{tt} \right)_{xx} = 0. \quad (2)$$

where c_0 is the linear longitudinal wave velocity for a MEE circular rod and N is the dispersion parameter, both depending on the material properties as well as the geometry of the rod. Equation (2) is a nonlinear wave equation with dispersion caused by the transverse Poisson's effect. Here, we use of an effective method namely the Fibonacci exp-function method for constructing a range of exact solutions for the following ordinary partial differential equations that in this paper we developed solutions as well. In this paper, we put forth the new approach of Fibonacci exp-function method to construct exact travelling wave solutions including solitons, kink, periodic and rational solutions to the longitudinal wave motion equation in a nonlinear magneto-electro-elastic circular rod and Burger equations. The purpose of this paper is to obtain exact solutions of the longitudinal wave motion equation in a nonlinear magneto-electro-elastic circular rod and Burger equations. and to determine the accuracy of the Fibonacci exp-function method in solving these kind of problems. The article is organized as follows: In Section 2, first we briefly give the step of the method and apply this method to solve the nonlinear partial differential equations. In Section 3, the application of the Fibonacci exp-function method to the longitudinal wave motion equation in a nonlinear magneto-electro-elastic circular rod and Burger equations will be introduced briefly. Also a conclusion is given in Section 4. Finally some references are given at the end of this paper.

1. Fibonacci exp-function method

The symmetrical Fibonacci sine (sFs) and the symmetrical Fibonacci cosine (cFs) are defined as follows

$$\text{sFs}(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad (3)$$

$$\text{cFs}(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad (4)$$

and they have the properties

$$a^x = \frac{\sqrt{5}}{2}(\text{sFs}(x) + \text{cFs}(x)), \quad (5)$$

$$a^{-x} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\text{cFs}(x) - \text{sFs}(x)), \quad (6)$$

$$(\text{cFs}(x))^2 - (\text{sFs}(x))^2 = \frac{4}{5}, \quad (7)$$

$$(\text{cFs}(x))' = \ln a(\text{sFs}(x)), \quad 0.5\text{cm}(\text{sFs}(x))' = \ln a(\text{cFs}(x)). \quad (8)$$

Obviously, when $a = e$,

$$sFs(x) = \frac{2\sinh(x)}{\sqrt{5}}, \quad cFs(x) = \frac{2\cosh(x)}{\sqrt{5}}. \quad (9)$$

We first consider the nonlinear equation of the form

$$\mathcal{N}(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{tx}, \dots) = 0, \quad (10)$$

and introduce the transformation as

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx + \omega t, \quad (11)$$

where c is constant to be determined later, therefore Eq. (10) reduced to ODE as follow

$$\mathcal{M}(u, \omega u', ku', k^2 u'', \dots) = 0. \quad (12)$$

The Fibonacci EFM is based on the assumption that travelling wave solutions can be expressed in the following form

$$u(\eta) = \frac{A_0 + A_1 a^\eta + A_2 a^{2\eta} + \dots + A_m a^{m\eta}}{B_0 + B_1 a^\eta + B_2 a^{2\eta} + \dots + B_m a^{m\eta}} \quad (13)$$

where $A_0, A_k (k = 1, 2, \dots, m), B_0, B_k (k = 1, 2, \dots, m)$ λ and μ are constants to be determined later, $A_m \neq 0, B_m \neq 0$, but the degree of which is generally equal to or less than $m - 1$, the positive integer m can be determined by considering the homogeneous balance between the highest order derivatives and nonlinear terms appearing in Eq. (10).

2. Application of the Fibonacci EFM to Burger equation

The Burger equation which has been extensively investigated. The nonlinear Burger equation is a nonlinear partial differential equation of second order which appears in various areas of applied mathematics, such as modeling of fluid dynamics, turbulence, boundary layer behavior, shock wave formation, and traffic flow as follows

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \quad (14)$$

In this section the Fibonacci EFM will be applied to handle Burger equation. On substituting the transformation rule $\xi = x - ct$ into Eq. (14) we obtain

$$-cu' + uu' - u'' = 0, \quad (15)$$

where by integrating Eq. (15) with respect to ξ , we obtain

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - u' = 0. \quad (16)$$

Using (13), for sake of simplicity let $m = 2$, $u(\xi)$ is expressed in rational expansion form

$$u(\xi) = \frac{A_0 + A_1 a^\xi + A_2 a^{2\xi}}{B_0 + B_1 a^\xi + B_2 a^{2\xi}}. \quad (17)$$

Substituting (17) into Eq. (16) and equating the coefficients of all powers of a to zero yields a set of algebraic equations for $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ and c . Solving, with the help of mathematica programm, the system of algebraic equations, we obtain six sets of solutions as follows:

(I) First set:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2\ln(a)B_1, \quad A_2 = 0, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = B_1, \quad B_2 = B_2, \quad c = \ln(a). \quad (18)$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_1(x, t) = \frac{2\ln(a)B_1 a^{x-\ln(a)t}}{B_1 a^{x-\ln(a)t} + B_2 a^{2x-2\ln(a)t}} \quad (19)$$

Remark 1. Our aim in this remark is to show that the Fibonacci Expa-function method could be used to determine traveling wave solutions in the form of symmetrical hyperbolic Fibonacci function. This can be easily obtained by selecting specific values for the parameters that present in the solutions as shown below. Now if we assume $k = B_2/B_1$, solution (19) can be transformed into the following form

$$u_1(x, t) = \frac{2\ln(a)}{1 + \frac{k\sqrt{5}}{2}[sFs(x-\ln(a)t) + cFs(x-\ln(a)t)]}, \quad (20)$$

where a and k are free parameters.

(II) Second set:

$$A_0 = 4\ln(a)B_0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad B_0 = B_0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = B_2, \quad c = 2\ln(a). \quad (21)$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_2(x, t) = \frac{4\ln(a)B_0}{B_0 + B_2 a^{2x-4\ln(a)t}} \quad (22)$$

Remark 2. Now if we assume $k = B_2/B_0$, solution (22) can be transformed into the following form

$$u_2(x, t) = \frac{4\ln(a)}{1 + \frac{5k}{4}[sFs(x-2\ln(a)t) + cFs(x-2\ln(a)t)]^2}, \quad (23)$$

where a and k are free parameters.

(III) Third set:

$$A_0 = 2\ln(a)B_0, \quad A_1 = A_1 A_2 = 0, \quad B_0 = B_0, \quad B_1 = B_1, \quad B_2 = -\frac{A_1(-2\ln(a)B_1 + A_1)}{4B_0\ln(a)^2}, \quad c = \ln(a). \quad (24)$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_3(x, t) = \frac{2\ln(a)B_0 + A_1 a^{x-\ln(a)t}}{B_0 + B_1 a^{x-\ln(a)t} - \frac{A_1(-2\ln(a)B_1 + A_1)}{4B_0\ln(a)^2} a^{2x-2\ln(a)t}}, \quad (25)$$

where a, B_0, A_1 and B_1 are free parameters.

(IV) Forth set:

$$A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = -4\ln(a)B_2, B_0 = B_0, B_1 = 0, B_2 = B_2, c = -2\ln(a). \quad (26)$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_4(x, t) = -\frac{4\ln(a)B_2 a^{2x+4\ln(a)t}}{B_0 + B_2 a^{2x+4\ln(a)t}}. \quad 3cm \quad (27)$$

Remark 3. Now if we assume $k = B_0/B_2$, solution (27) can be transformed into the following form

$$u_4(x, t) = -\frac{4\ln(a)}{1 + \frac{2k}{5}[sFs(x+2\ln(a)t) + cFs(x+2\ln(a)t)]^{-2}}, \quad (28)$$

where a and k are free parameters.

(V) Fifth set:

$$A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = -2\ln(a)B_2, B_0 = 0, B_1 = B_1, B_2 = B_2, c = -\ln(a). \quad (29)$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_5(x, t) = -\frac{2\ln(a)B_2 a^{2x+2\ln(a)t}}{B_1 a^{x+\ln(a)t} + B_2 a^{2x+2\ln(a)t}}. \quad (30)$$

Remark 4. Now if we assume $k = B_1/B_2$, solution (30) can be transformed into the following form

$$u_5(x, t) = -\frac{2\ln(a)}{1 + \frac{2k}{\sqrt{5}}[sFs(x+\ln(a)t) + cFs(x+\ln(a)t)]^{-1}}, \quad (31)$$

where a and k are free parameters.

(VI) sixth set:

$$A_0 = 0, A_1 = A_1, A_2 = \frac{A_1(2\ln(a)B_1 + A_1)}{2\ln(a)B_0}, B_0 = B_0, B_1 = B_1, B_2 = -\frac{A_1(2\ln(a)B_1 + A_1)}{4\ln(a)^2 B_0}. \quad (32)$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$c = -\ln(a), u_6(x, t) = \frac{A_1 a^{x+\ln(a)t} + \frac{A_1(2\ln(a)B_1 + A_1)}{2\ln(a)B_0} a^{2x+2\ln(a)t}}{B_0 + B_1 a^{x+\ln(a)t} - \frac{A_1(2\ln(a)B_1 + A_1)}{4\ln(a)^2 B_0} a^{2x+2\ln(a)t}}. \quad (33)$$

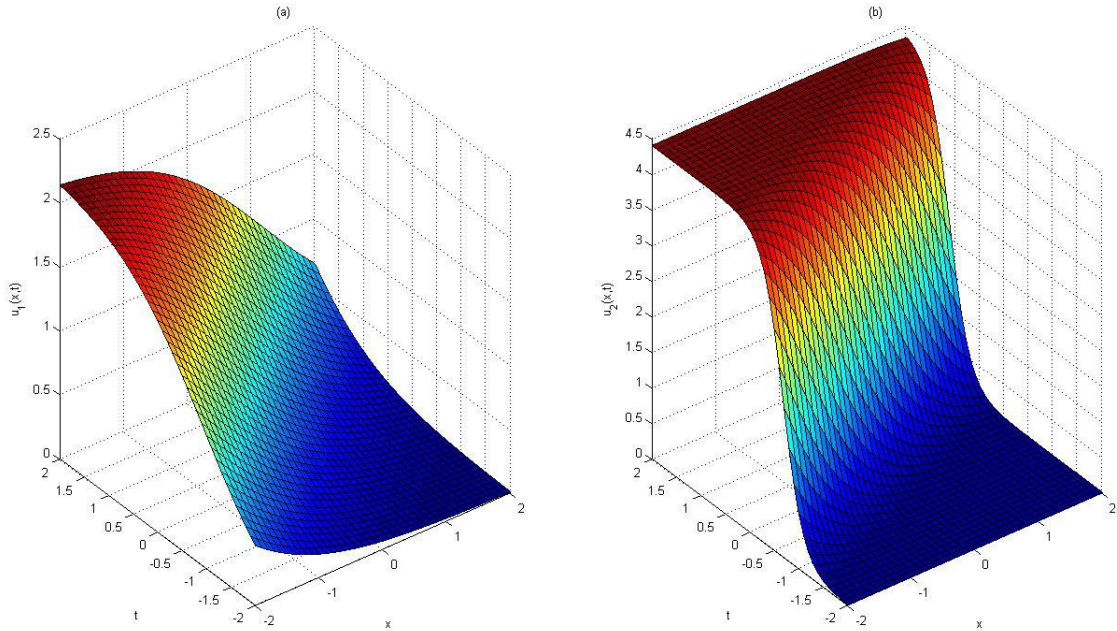


Figure 1: The surface of the exact solutions of Burgur equation (a) (19) u_1 when $a = 3, B_0 = 1$ and $B_2 = 3$ and (b) (22) u_2 when $a = 3, B_1 = 1$ and $B_2 = 3$.

3. Application of the Fibonacci EFM to longitudinal wave motion equation

Based on the constitutive relation for transversely isotropic piezoelectric and piezomagnetic materials, combined with the differential equations of motion, Xue et al. [22] have derived a longitudinal wave motion equation in a MEE circular rod of the form,

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} - \left(\frac{c_0^2}{2} u^2 + N u_{tt} \right)_{xx} = 0. \quad (34)$$

In this section the Fibonacci EFM will be applied to handle Burger equation. On substituting the transformation rule $\xi = k(x - \omega t)$ into Eq. (34) we obtain

$$k^2 \omega^2 u'' - k^2 c_0^2 - k^2 \left(\frac{c_0^2}{2} u^2 + N k^2 \omega^2 u'' \right) = 0. \quad (35)$$

By integrating Eq. (35) twice with respect to ξ , and neglecting the constant of integration, we obtain

$$u'' + \frac{c_0^2 - \omega^2}{N k^2 \omega^2} u + \frac{c_0^2}{2 N k^2 \omega^2} u^2 = 0. \quad (36)$$

Using (13), for sake of simplicity let $m = 2$, $u(\xi)$ is expressed in rational expansion form

$$u(\xi) = \frac{A_0 + A_1 a^\xi + A_2 a^{2\xi}}{B_0 + B_1 a^\xi + B_2 a^{2\xi}}. \quad (37)$$

Substituting (17) into Eq. (16) and equating the coefficients of all powers of a to zero yields a set of algebraic equations for $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ and c . Solving, with the help of mathematica programm, the system of algebraic equations, we obtain six sets of solutions as follows:

(I) First set:

$$A_0 = 0, A_1 = \frac{6(\omega^2 - c_0^2)B_1}{c_0^2}, \quad A_2 = 0, \quad B_0 = B_0, \quad B_1 = B_1, \quad B_2 = \frac{B_1^2}{4B_0}, \quad (38)$$

$$\omega = \omega, \quad k = \frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}.$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_1(x, t) = \frac{\frac{6(\omega^2 - c_0^2)B_1}{c_0^2} \frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t)}{B_0 + B_1 a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t)} + \frac{B_1^2}{4B_0} a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (2x - 2\omega t)}} = \quad (39)$$

$$\frac{\frac{24(\omega^2 - c_0^2)B_0 B_1}{c_0^2} \frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t)}{\left(2B_0 + B_1 a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t)} \right)^2}.$$

Remark 1. Our aim in this remark is to show that the Fibonacci Expa-function method could be used to determine traveling wave solutions in the form of symmetrical hyperbolic Fibonacci function. This can be easily obtained by selecting specific values for the parameters that present in the solutions as shown below. Now if we assume $2B_0/B_1 = 1$, solution (39) can be transformed into the following form

$$u_1(x, t) = \frac{6(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2} \frac{\sqrt{5} \left[\text{sFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t) \right) + \text{cFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t) \right) \right]}{\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\text{sFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t) \right) + \text{cFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}} (x - \omega t) \right) \right] \right)^2}, \quad (40)$$

where a and ω are free parameters.

(II) Second set:

$$A_0 = \frac{2B_0(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2}, \quad A_1 = -\frac{4B_1(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2}, \quad A_2 = \frac{B_1^2(\omega^2 - c_0^2)}{2B_0c_0^2}, \quad B_0 = B_0, \quad B_1 = B_1, \quad (41)$$

$$B_2 = \frac{B_1^2}{4B_0}, \quad \omega = \omega, \quad k = \frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}.$$

We, therefore, obtain the following solution of (14)

$$u_2(x, t) = \frac{\frac{2B_0(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2} - \frac{4B_1(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2} a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}(x - \omega t)} + \frac{B_1^2(\omega^2 - c_0^2)}{2B_0c_0^2} a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t)}}{B_0 + B_1 a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}(x - \omega t)} + \frac{B_1^2}{4B_0} a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}(2x - 2\omega t)}} = \quad (42)$$

$$\frac{2(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2} \frac{\left(2B_0 - B_1 a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}(x - \omega t)} \right)^2 - 4B_0 B_1 a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}(x - \omega t)}}{\left(2B_0 + B_1 a^{\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{c_0^2 - \omega^2}{N}}(x - \omega t)} \right)^2}.$$

Remark 2. Now if we assume $2B_0/B_1 = 1$ solution (42) can be transformed into the following form

$$u_2(x, t) = \frac{2(\omega^2 - c_0^2)}{c_0^2} \left\{ \frac{\left(\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\text{sFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) + \text{cFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) \right] \right)^2}{\left(\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\text{sFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) + \text{cFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) \right] \right)^2} \right. \quad (43)$$

$$\left. - \frac{\left(\left[\sqrt{5} \left[\text{sFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) + \text{cFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) \right] \right)^2}{\left(\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\text{sFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) + \text{cFs} \left(\frac{1}{\omega \ln(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 - c_0^2}{N}}(x - \omega t) \right) \right] \right)^2} \right\},$$

where a and ω are free parameters.

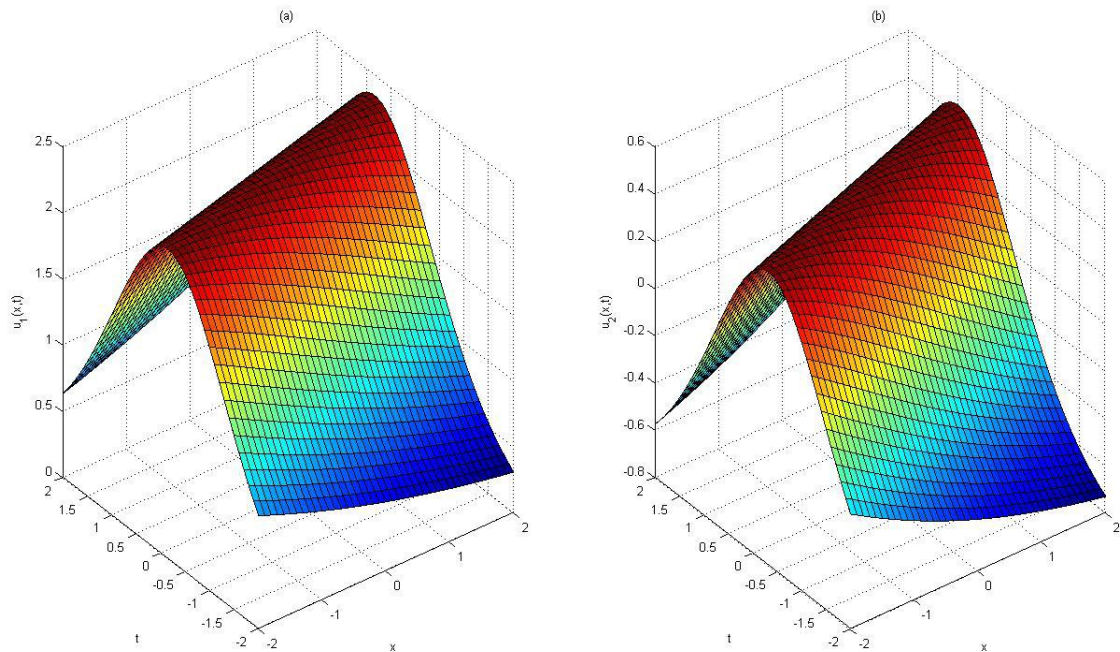


Figure 2: The surface of the exact solutions of longitudinal wave motion equation (a) (39) u_1 when $a = 3, B_0 = 1, B_1 = 3, c_0 = 3$ and $\omega = 4$ and (b) (42) u_2 when $a = 3, B_0 = 1, B_1 = 3, c_0 = 4$ and $\omega = 3$.

In Figures 1-2, the graphical representations of some obtained solutions of aforementioned equations are given.

Conclusion

The Fibonacci exp-function method was successfully used to establish periodic wave and solitary wave solutions. The obtained results complement the useful works of others for this important equations. The Fibonacci exp-function method is a useful method for finding travelling wave solutions of nonlinear evolution equations. The Fibonacci exp-function method is more powerful in searching for exact solutions of NLPDEs. Some of these results are in agreement with the results reported specially by [22]. It can be concluded that the this method is a very powerful and efficient technique in finding exact solutions for wide classes of problems.

References

1. Ablowitz, M.J. Clarkson, P.A. (1991). Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. *Cambridge: Cambridge University Press.*

2. Dehghan, M. Manafian, J. (2009). The solution of the variable coefficients fourth-order parabolic partial differential equations by homotopy perturbation method. *Z. Naturforsch*, 64a, 420-430.
3. Dehghan, M. Manafian, J. Saadatmandi, A. (2010). Application of semi-analytic methods for the Fitzhugh-Nagumo equation, which models the transmission of nerve impulses. *Math. Meth. Appl. Sci.* 33, 1384-1398.
4. Dehghan, M. Manafian, J. Saadatmandi, A. (2010). Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. *Num. Meth. Partial Differential Eq. J.* 26, 448-479.
5. Dehghan, M. Manafian, J. Saadatmandi, A. (2011). Analytical treatment of some partial differential equations arising in mathematical physics by using the Exp-function method. *Int J Modern Phys B*, 25, 2965-2981.
6. Dehghan, M. Manafian, J. Saadatmandi, A. (2011). Application of the Exp-function method for solving a partial differential equation arising in biology and population genetics. *Int J Num Methods for Heat Fluid Flow*, 21, 736-753.
7. El-Wakil, S.A. Abdou, M.A. Hendi, A. (2008). New periodic wave solutions via Exp-function method. *Phy. Lett. A*, 372, 830-840.
8. Fan, E. (2000). Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Phys. Lett. A*, 277, 212-218.
9. Fazli M. Aghdaei, J. Manafian Heris, (2011). Exact solutions of the couple Boiti-Leon-Pempinelli system by the generalized $(\frac{G'}{G})$ -expansion method. *J. Math. Ext*, 5, 91-104.
10. He, J.H. (1999). Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique: some examples. *Int. J. Nonlinear Mech*, 34, 699-708.
11. Hirota, R. (2004). The Direct Method in Soliton Theory. *Cambridge Univ. Press*, (in English).
12. Manafian Heris, J. I. Zamanpour, (2013). Analytical treatment of the coupled Higgs equation and the Maccari system via Exp-Function method. *Acta Univ Apul* 33, 203-216.
13. Manafian Heris, J., M. (2013). Lakestani, Solitary wave and periodic wave solutions for variants of the KdV-Burger and the K(n, n)-Burger equations by the generalized tanh-coth method. *Commun. Num. Anal.* 1-18.
14. Manafian Heris, J. M. (2014). Lakestani, Exact solutions for the integrable sixth-order Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota system by the analytical methods. *Int Scholarly Research Notices*, 1-8.
15. Manafian Heris, J., Bagheri, M. (2010). Exact solutions for the modified KdV and the generalized KdV equations via Exp-function method, *J Math Ext*, 4, 77-98.
16. Manafian J. Lakestani, M. (2015). Solitary wave and periodic wave solutions for

- Burgers, Fisher, Huxley and combined forms of these equations by the (G'/G) -expansion method. *Pramana J. Phys.* 2, 1-22.
17. Manafian, J., Zamanpour, I. (2014). Exact travelling wave solutions of the symmetric regularized long wave (SRLW) using analytical methods. *Stat. Optim. Inf. Comput.* 2, 47-55.
18. Menga, X.H., Liua, W. J. Zhua, H.W. Zhang, C.Y. Tian, B. (2008). Multi-soliton solutions and a Bäcklund transformation for a generalized variable-coefficient higher-order nonlinear Schrödinger equation with symbolic computation, *Phys. A*, 387, 97-107.
19. Ren, Y.J., Zhang, H.Q. (2006). A generalized F-expansion method to find abundant families of Jacobi elliptic function solutions of the $(2 + 1)$ -dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation, *Chaos Solitons Fractals*, 27, 959-979.
20. Wang, M. Li, X. Zhang, J. (2008). The $(\frac{G'}{G})$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A*, 372, 417-423.
21. Wazwaz, A.M. (2006). Travelling wave solutions for combined and double combined sine-cosine-Gordon equations by the variable separated ODE method. *Appl. Math. Comput.* 177, 755-760.
22. Xue CX, Pan E, Zhang SY. (2011). Solitary waves in a magneto-electro-elastic circular rod. *Smart Mater. Struct.* 20: 7. doi:10.1088/0964-1726/20/10/105010.

XÜSUSİ DİFFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ ÜÇÜN FİBONAÇÇI EKSPONENSİAL-FUNKSIYA ÜSULUNUN TƏTBİQİ

Cəlil Manafian

Təbriz Universiteti, Təbriz, İran

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Biz bu işdə uzunasına dalğa hərəkət tənliyinin və Burger tənliklərinin dəqiq həllərini qeyri-xətti maqnit-elektro-elastik dairəvi çubuqda yaradıq. Əvvəlcə, Fibonaççi eksponensial-funksiya üsulundan qeyri-xətti təkamül tənliklərinin tək dalğa həllərini almaq üçün istifadə edilmişdir. Fibonaççi eksponensial-funksiya üsulu qeyri-xətti dalğa tənliklərini idarə etmək üçün daha geniş tətbiq imkanlarını təqdim edir. Göstərilmişdir ki, Fibonaççi eksponensial-funksiya üsulları simvolik hesablamının köməyi ilə riyazi fizikada qeyri-xətti təkamül tənliklərinin həlli üçün çox sadə və qüvvətli riyazi cihazı əvəz edir.

Açar sözlər: tək dalğa həllər, Fibonaççi eksponensial-funksiya üsulu, Burger tənliyi; uzunasına dalğa hərəkət tənliyi.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ФИБОНАЧЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЧАСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Джалил Манафиан

Табризский университет, Табриз, Иран,

Лянкяранский государственный университет, Лянкяран, Азербайджан

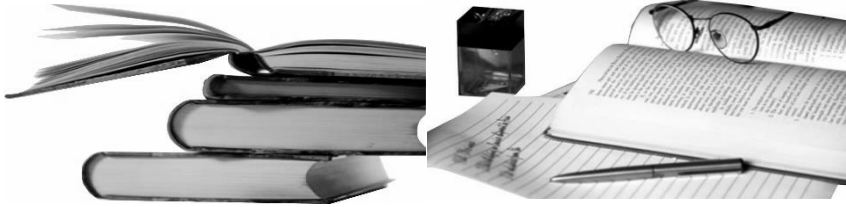
В данной работе мы разработали точные решения к уравнению движения продольных волн в нелинейной магнитоэластичной круглой стержне и уравнениям Бюргерса. Метод экспериментальной функции Фибоначчи был использован для построения уединенных волновых решений нелинейных эволюционных уравнений. Метод экспериментальной функции Фибоначчи имеет более широкое применение для обработки нелинейных волновых уравнений. Показано, что методы экспериментальной функции Фибоначчи с помощью символьных вычислений обеспечивают простой и мощный математический инструмент для решения нелинейных эволюционных уравнений в математической физике.

Ключевые слова: уединенные волновые решения, метод экспериментальной функций Фибоначчи, уравнение Бюргерса, уравнение движения продольных волн.

Daхil oldu: 01.03.2022;

Çара qəbul edildi: 30.05.2022;

Çap edildi: 20.06.2022



Elmi xəbərlər jurnalı Lənkəran Dövlət Universitetinin
mətbəəsində çap olunmuşdur

Yığıma verilmişdir: 30.05.2022
Çapa imzalanmışdır: 20.06.2022
Kağızın formatı: $64 \times 84^{\frac{1}{8}}$
Çap vərəqi: 22 c.v., tiraj: 100
Çap ofset üsulu ilə.

Ünvan: Az 4200, Lənkəran şəhəri, General Həzi Aslanov xiyabanı 50
e-mail: elmi_meqale@lsu.edu.az
www.lsu.edu.az